Fit für die Q-Phase ?

Mathematiktraining für die Schüler und Schülerinnen des Beruflichen Gymnasiums Gelnhausen

1. Gleichungen (mit und ohne Parameter)

Löse folgende Gleichungen:

1.1 $3x+4=7$

1.2 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}$

1.3 $2\bullet 2^x=16$

1.4 $4x^5+24x^4+21x^3=49x^2$

1.5 $\frac{1}{x-5}=0$

1.6 $x^2-2tx+t^2=0$

1.7 $\sin 6x=0$

1.8 $2e^x=2$

1.9 $-\frac{1}{32}x^4+\frac{5}{8}x^2-2=0$

1.10 $-\frac{5}{2}x=0$

1.11 $\frac{3x-2}{2x+5}=0$

1.12 $-\frac{2}{k}x+6=4k+1,\quad \mathrm{k}\neq 0$

1.13 $\sin 4x+\sin 3x=0$

1.14 $-\frac{2}{9}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}=0$

1.15 $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=0$

1.16 $2e^x(1-e^x)=0$

1.17 $\frac{x^3-k^2x}{x+k}=0$

1.18 $-\frac{3}{2}x^2+6=0$

1.19 $\cos 2x=\frac{1}{2}$

1.20 $-\frac{1}{5}x-2=\frac{4}{3}$

1.21 $e^{\frac{1}{2}x}-e^x=0$

1.22 $-5x^3-15tx^2+16t^2x+4t^3=0$

1.23 $\sin 5x+\cos x=0$

1.24 $x^2+bx-2b^2=0$

1.25 $\tan 3x=-1$

1.26 $\frac{4x^3-8x^2-11x-3}{2x+1}=0$

1.27 $(x^2-k^2)e^{kx}=0$

1.28 $\tan 2x+\tan x=0$

1.29 $\log_2(2\mathrm{x}-1)=3$

1.30 $\ln(2\mathrm{x}+\mathrm{e})=1$

2 Umgang mit graphischen Darstellungen von Funktionen

2.1 **Skizziere** die Graphen der folgenden Funktionen ohne Verwendung von Software, Wertetabelle und Differentialrechnung.

a) $f(x)=\frac{2}{3}x-1$ b) $f(x)=-(x-3)^2+2$

b) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ c) $f(x)=(x+1)^3(x-2)(x-2)(x+4{,}5)$

d) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ e) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

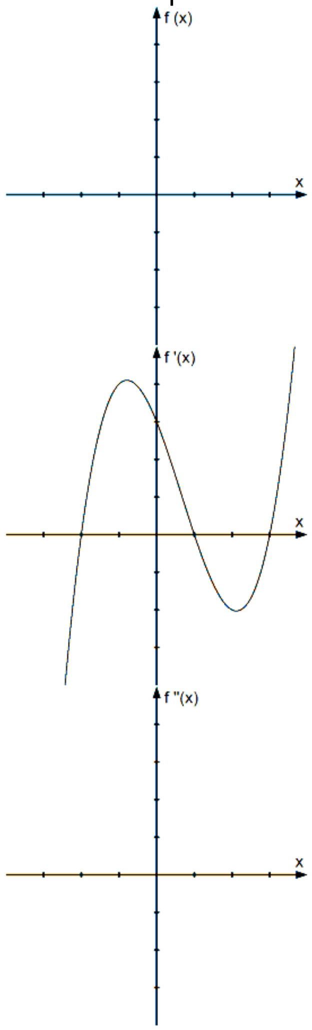
f) $f(x)=x-\frac{1}{x}$ g) $f(x)=2\sin(x)$

h) $f(x)=\cos(2x)-1$ i) $f(x)=\sin(x+\pi)$

j) $f(x)=2^x$ k) $f(x)=0{,}5^x$

l) $f(x)=2\cdot e^x$ m) $f(x)=e^{-x}+1$

2.2 Gegeben ist der Graph einer Funktion f'. Skizziere den Graphen der zweiten Ableitung sowie den Graphen einer Funktion f.



3 Differentialrechnung

3.1 Ableitungen

Bestimmt die Ableitungsfunktionen und fasst so weit wie möglich zusammen. Benennt die Regeln, die ihr zum Differenzieren verwendet habt.

a) $f(x)=2x^4+3\sin x$

b) $f(x)=\sqrt{x}\cdot(1+\cos x)$

c) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{2x^3}$

e) $s(t)=\dfrac{3}{4}t^{\frac{2}{3}}-3v_0t$

f) $f(x)=\sqrt{x+1}$

g) $f(x)=-4x^3+0{,}5x-\pi$

h) $f(x)=ex^5+\left(x^2+2x\right)^4$

i) $f(x)=\dfrac{1+3x}{1-2x}$

j) $k(s)=\dfrac{2}{as^2}$

k) $f(u)=4\sqrt{x^3+5x^2}$

l) $g(t)=\sin\dfrac{1}{t}$

m) $g(a)=a^2+\sqrt{2a}-4$

n) $f(r)=-5\left(\dfrac{2}{3}-4r\right)^5$

o) $f(x)=\sqrt[5]{x^7}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}\cdot(x+1)$

p) $f(x)=\dfrac{1}{6}x^6-x^2-\sqrt{2}$

q) $f(x)=\dfrac{8}{x^2+2}$

r) $f(z)=-\cos(2z+\pi)$

s) $f(x)=(x-3)^5+\sqrt{2}x-\dfrac{4}{5}$

3.2 Kurvendiskussion einer Funktion ohne Parameter

Führe eine vollständige Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Symmetrie, Randverhalten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, alle Wendetangenten, Wertebereich) der folgenden Funktion durch und zeichne den Graphen:

$$f(x)=\frac{(x-1)^3\cdot(3x+5)}{12}$$

3.3 Kurvendiskussion einer Funktion mit Parameter (Kurvenschar)

Gegeben ist die Funktion f_t für $t\in\mathbb{R}$ durch $f_t(x)=\dfrac{1}{4t^2}\cdot\left(x^4-6t^2x^2+9t^4\right)$

K_t sei das Schaubild der Funktion f_t.

a) Bestimme die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte in Abhängigkeit von t. Zeichne das Schaubild von K_1, K_2 und K_3 für $-5\le x\le 5$.

b) Gib die Gleichung der Ortskurve aller Wendepunkte an.

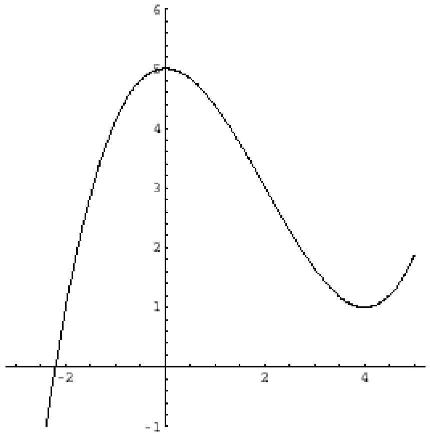
c) Die Tangente im Wendepunkt $W_1(t/f_t(t))$ schneidet das Schaubild K_t in einem weiteren Punkt S_t. Berechne dessen Koordinaten.

d) $P\left(u/f_2(u)\right)$ sei ein Kurvenpunkt auf dem Schaubild von K_2 zwischen dem Hochpunkt und dem rechten Tiefpunkt. Q sei das Spiegelbild von P an der y-Achse, O ist der Koordinatenursprung. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ in Abhängigkeit von u. Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt maximal?

4. Anwendungsaufgaben

4.1. Extremwertaufgaben

a) Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5, \quad x \in \mathbb{R}$.



Die Gerade $x = u$ $(0 \leq u \leq 4)$ schneidet den Graphen von f im Punkt P und die x-Achse in Q.

Für welchen Wert von u hat das Dreieck OQP den absolut größten Flächeninhalt?

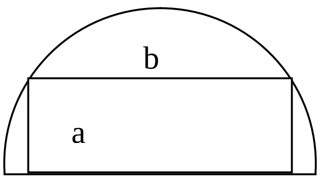
Gib den maximalen Flächeninhalt an!

b) Ein Draht der Länge 20cm soll eine rechteckige Fläche mit möglichst großem Inhalt umrahmen. Wie groß sind Länge und Breite des Rechtecks?

c) Aus einem 36cm langen Draht soll das Modell einer quadratischen Säule hergestellt werden. Wie lang sind die Kanten zu wählen, damit die Säule maximales Volumen hat?

d) (i) Der Querschnitt eines Kanals ist ein Rechteck mit angesetztem Halbkreis. Wähle die Maße dieses Rechtecks so, dass bei einem Umfang von 30m des Kanalquerschnitts sein Inhalt möglichst groß wird.
ii)Zeige nun allgemein, dass bei einem Umfang U der Radius r des Halbkreises gleich der Breite b des aufgesetzten Rechtecks ist. [Zur Kontrolle: r = b = U/(π+4)]

e) In einen Halbkreis mit dem Radius r =10cm soll ein Rechteck mit den Seiten a und b einbeschrieben werden (s. Abb.). Berechne a und b (=Breite), so dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal ist. Auf den Nachweis des Maximums kann verzichtet werden.



4.2. Bestimmung ganzrationaler Funktionen („Steckbriefaufgaben“)

a) Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Parabel.
   (1) O(0|0) und P(2|3) sind Punkte der Parabel, im Punkt P hat die Tangente die Steigung 2.
   (2) Die Parabel hat den Scheitel S(1|2) und geht durch O(0|0).
   (3) An der Stelle 0,75 liegt der Scheitel der Parabel, an der Stelle 1 hat die Parabeltangente die Steigung 4.

b) Bestimme eine ganzrationale Funktion dritten Grades so, dass für den Graphen gilt:
   (1) O(0|0) ist Punkt des Graphen, W(2|4) ist Wendepunkt, die zugehörige Wendetangente hat die Steigung -3.
   (2) O(0|0) ist Wendepunkt, an der Stelle $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ liegt ein relativer Hochpunkt vor, P(1|2) ist ein Punkt des Graphen.

c) Bestimme eine ganzrationale Funktion fünften Grades, deren Graph zu O(0|0) punktsymmetrisch ist, durch P(1| -2) verläuft und E($\sqrt{2}$ | $-\sqrt{8}$) als relativen Extrempunkt hat. Untersuche den Graphen der Funktion.